



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

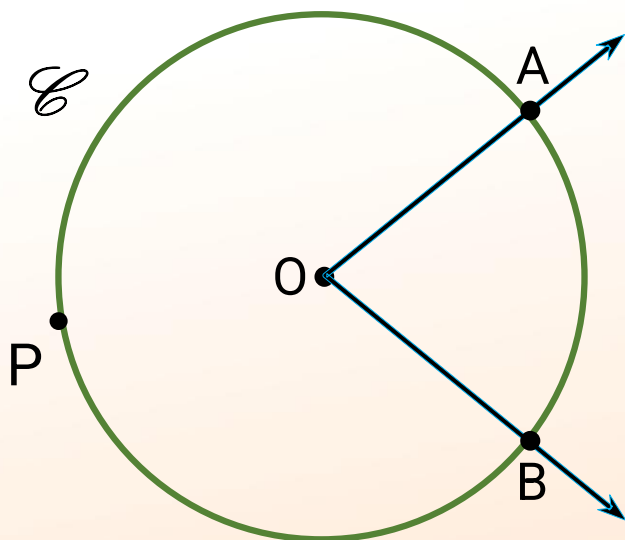
**ÁNGULOS EN LA
CIRCUNFERENCIA**

**CICLO
PRE
2024-1**



ÁNGULO CENTRAL

Definición.- Se denomina **ángulo central** al ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia y cuyos lados contienen a dos radios



$\angle AOB$: Ángulo central

Definición.- Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia con centro O y sean los puntos A y B que están contenidos en $\mathcal{C}$ pero que no son los extremos de un diámetro. Entonces,

El **arco menor** $\widehat{AB}$ es la unión de A , B y todos los puntos de la circunferencia situados en el interior del $\angle AOB$.

El **arco mayor** $\widehat{APB}$ es la unión de A , B y todos los puntos de la circunferencia situados en el exterior del $\angle AOB$.

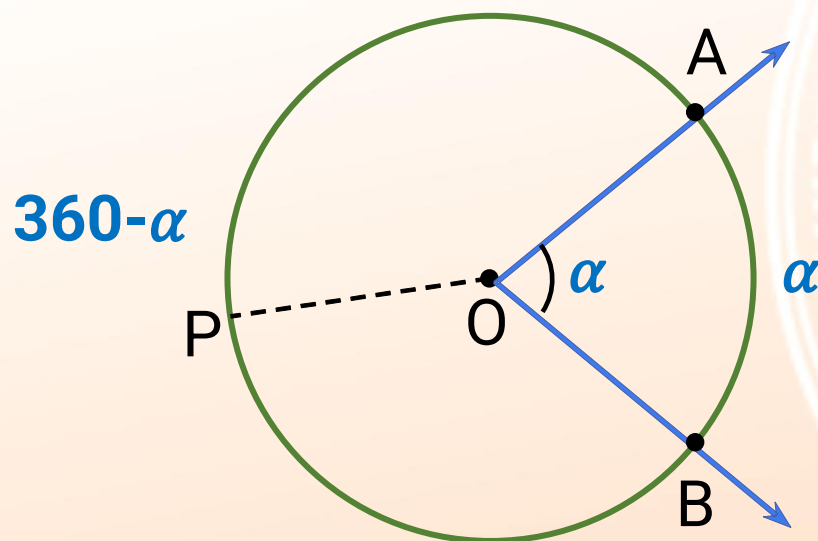
En cada caso A y B son los extremos del arco $\widehat{AB}$.

Arco menor $\widehat{AB}$

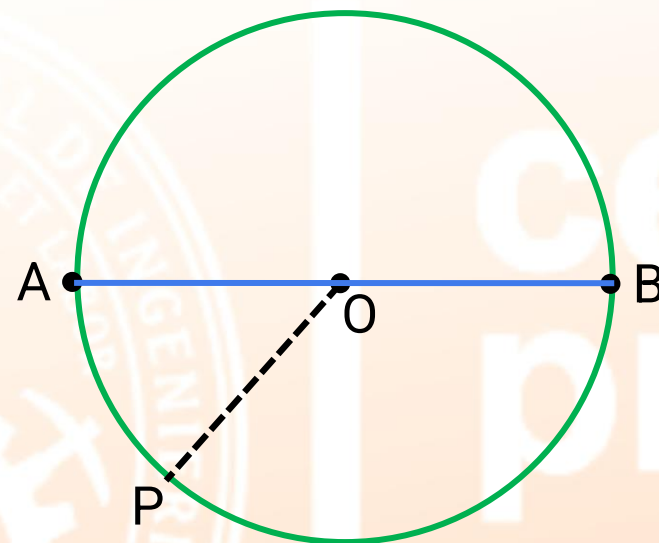
Arco mayor $\widehat{APB}$

Medida en grados de un arco de circunferencia

La medida en grados de un **arco menor**, es la medida α de su ángulo central correspondiente. La medida en grados de un **arco mayor** es $360 - \alpha$, siendo α la medida de su correspondiente arco menor.



Definición.- Si A y B son los extremos de un diámetro, entonces se obtienen dos arcos, cada una de los cuales se llama una **semicircunferencia**. Los puntos A y B son los puntos extremos de la semicircunferencia.



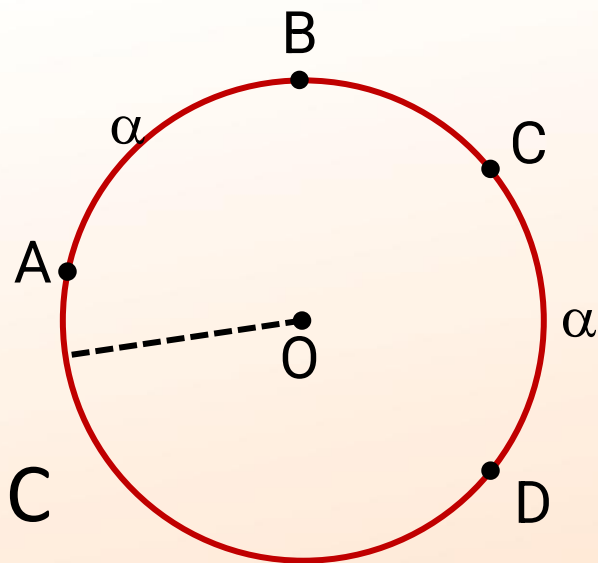
$\overline{AB}$ diámetro

$\widehat{AB}$ semicircunferencia

$\widehat{APB}$ semicircunferencia

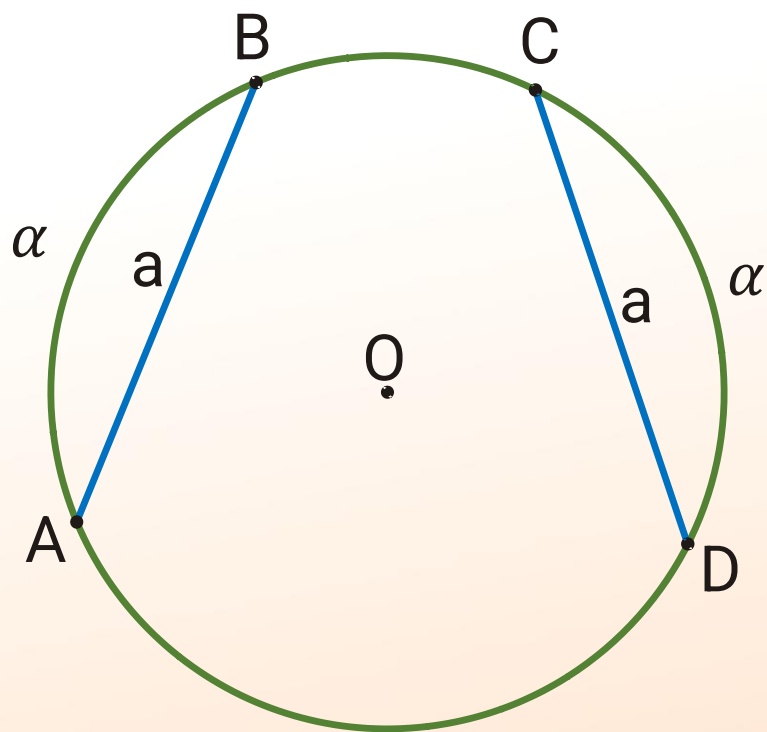
Definición.- Dos **circunferencia son congruentes**, si sus radios son congruentes.

Definición.- En una circunferencia o en dos circunferencias congruentes, dos **arcos son congruentes**, si las medidas de los arcos son iguales.



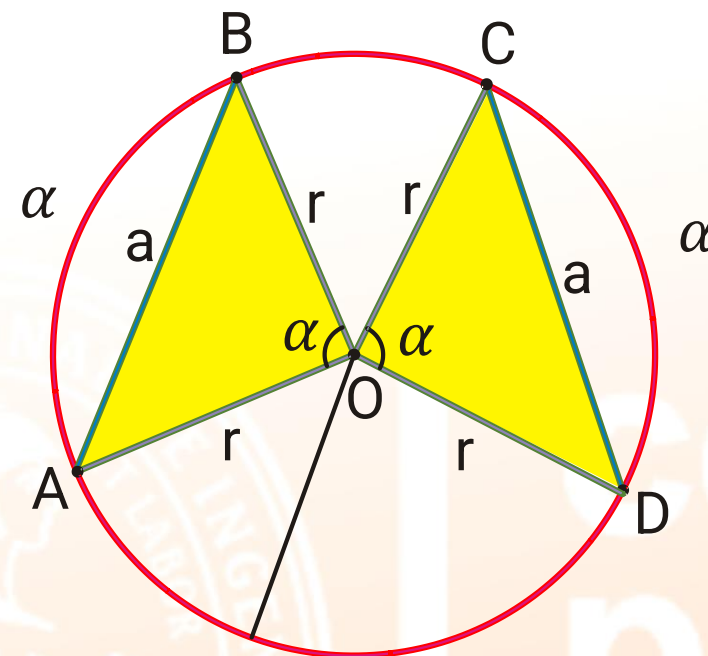
$$m\widehat{AB} = m\widehat{CD} \Leftrightarrow \widehat{AB} \cong \widehat{CD}$$

Teorema. En toda circunferencia, si dos arcos son congruentes, entonces sus respectivas cuerdas también lo son.



$$\widehat{AB} \cong \widehat{CD} \Leftrightarrow \overline{AB} \cong \overline{CD}$$

Demostración.

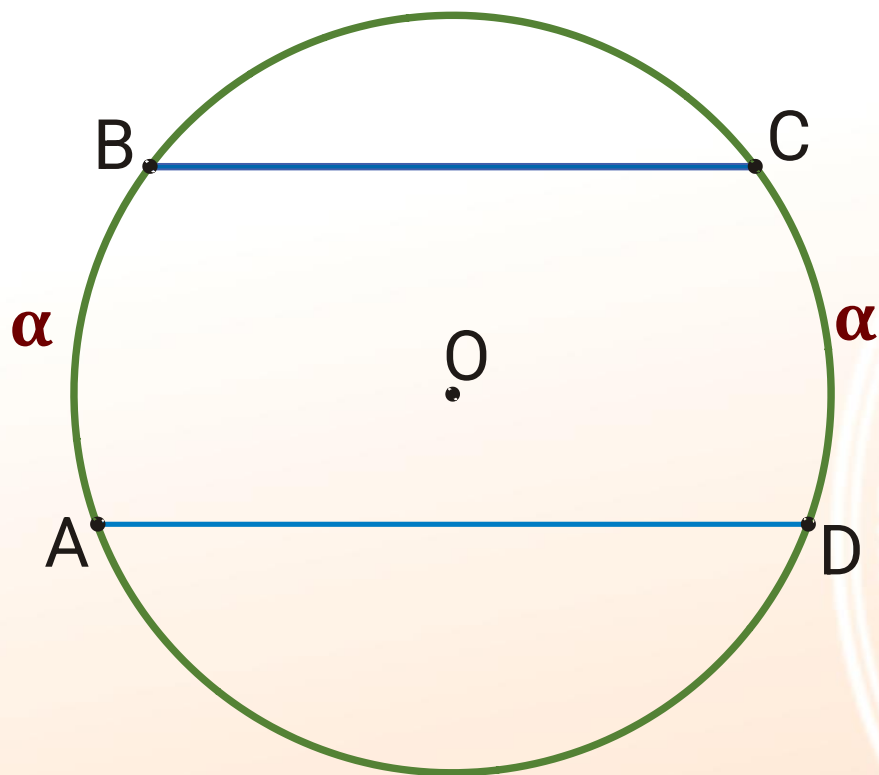


$$\text{Si } m \widehat{AB} = m \widehat{CD} \Rightarrow m \angle AOB = m \angle COD = \alpha$$

$$\triangle AOB \cong \triangle COD \text{ (LAL)}$$

$$\therefore AB = CD = a$$

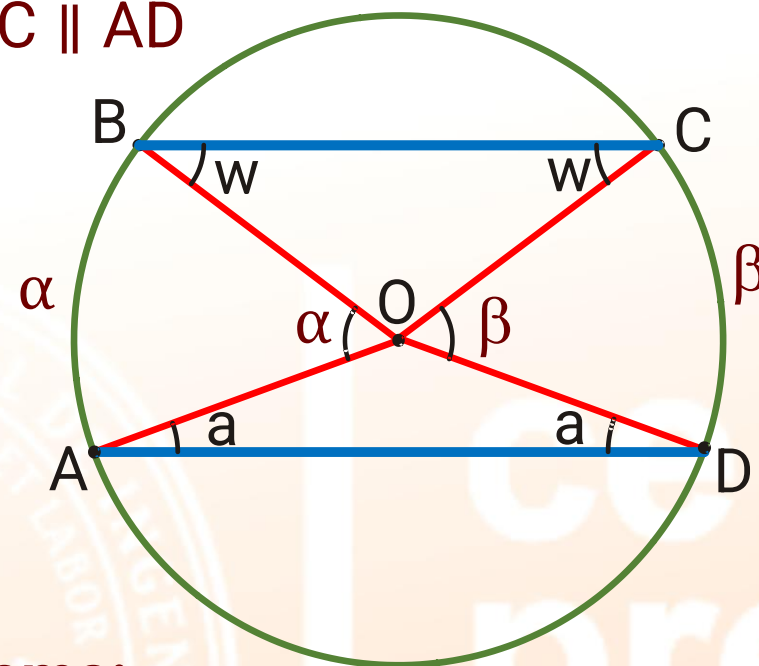
Teorema. En toda circunferencia, los arcos comprendidos entre cuerdas paralelas, son congruentes.



$$\overline{BC} \parallel \overline{AD} \Leftrightarrow \widehat{mAB} = \widehat{mCD}$$

Demostración.

Sea $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$



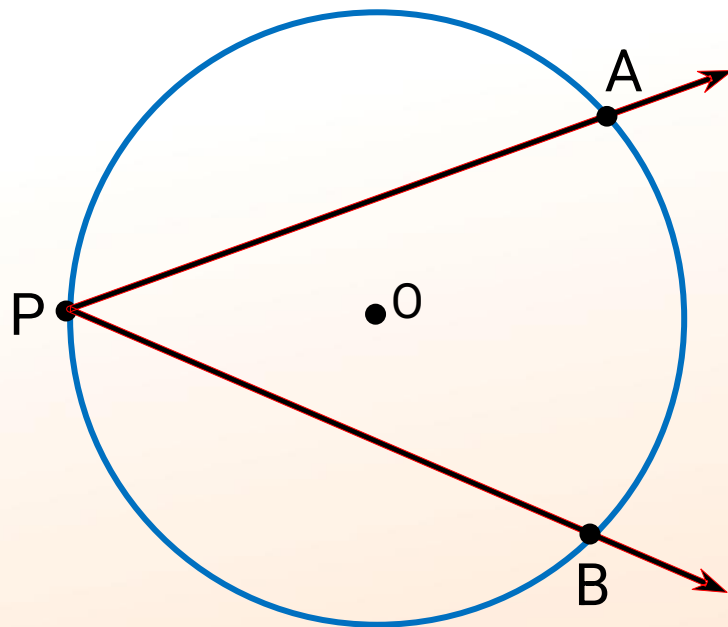
Teorema:

$$\begin{aligned} \alpha &= w + a \\ \beta &= w + a \end{aligned} \Rightarrow \alpha = \beta$$

$$\widehat{mAB} = \alpha \wedge \widehat{mCD} = \beta$$

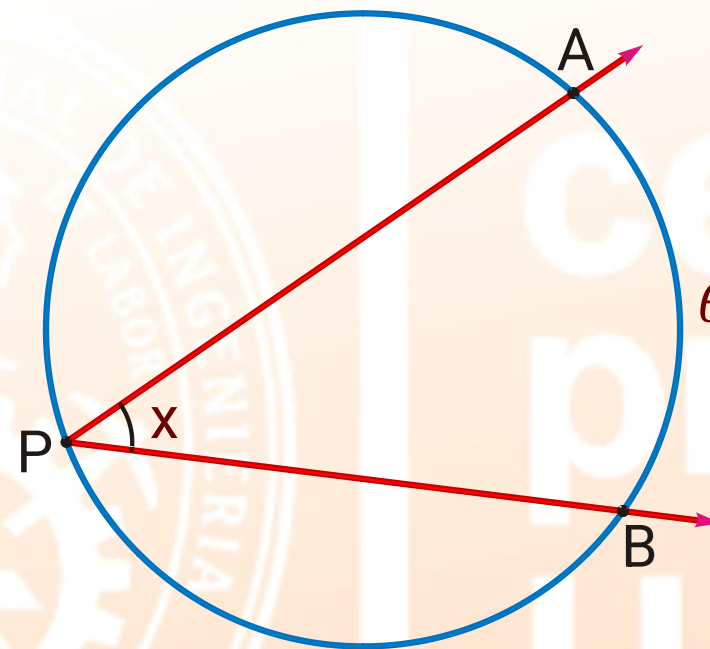
$$\therefore \widehat{AB} \cong \widehat{CD}$$

Definición.- Se denomina **ángulo inscrito** en una circunferencia, al ángulo que tiene el vértice en la circunferencia y los lados que contienen cada uno una cuerda.



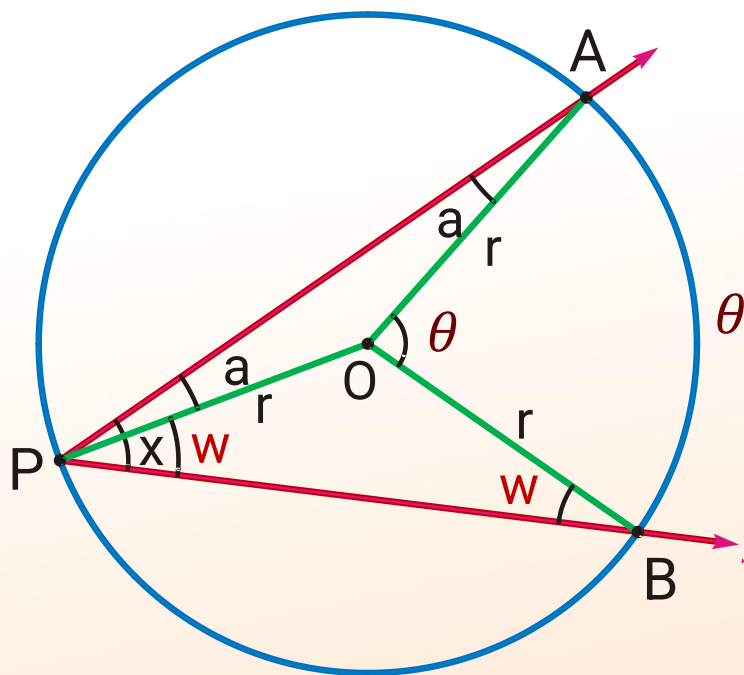
$\angle APB$: Ángulo inscrito

Teorema. La medida del **ángulo inscrito** es la mitad de la medida del arco cuyos extremos pertenecen al ángulo y que no contiene al vértice.



$$x = \frac{\theta}{2}$$

Demostración del teorema de la medida del ángulo inscrito.



$\triangle AOP$ y $\triangle BOP$ son isósceles

$$m \angle PAO = m \angle APO = a$$

$$m \angle PBO = m \angle BPO = w$$

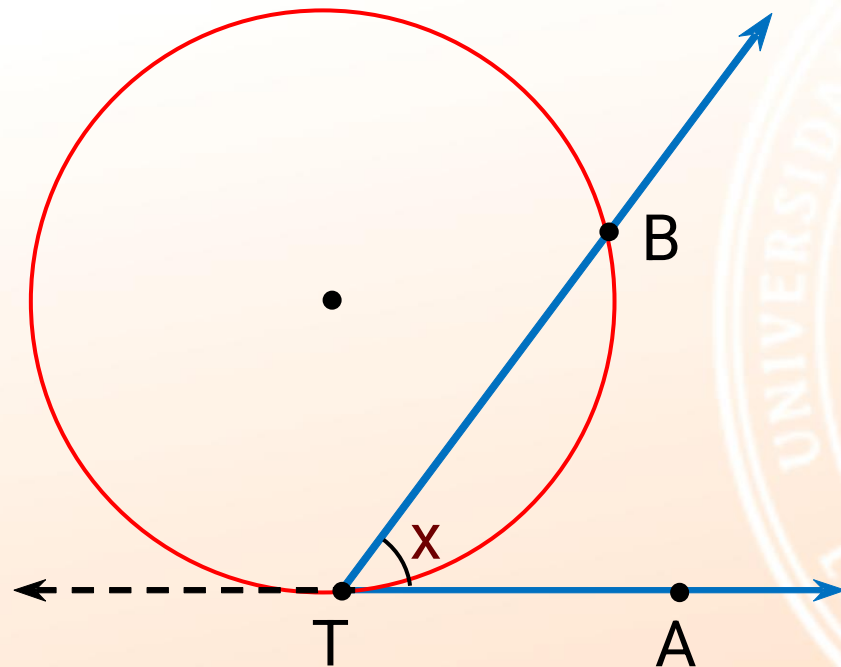
$$x = a + w$$

$$\theta = 2a + 2w$$

$$\text{Entonces: } a + w = \frac{\theta}{2}$$

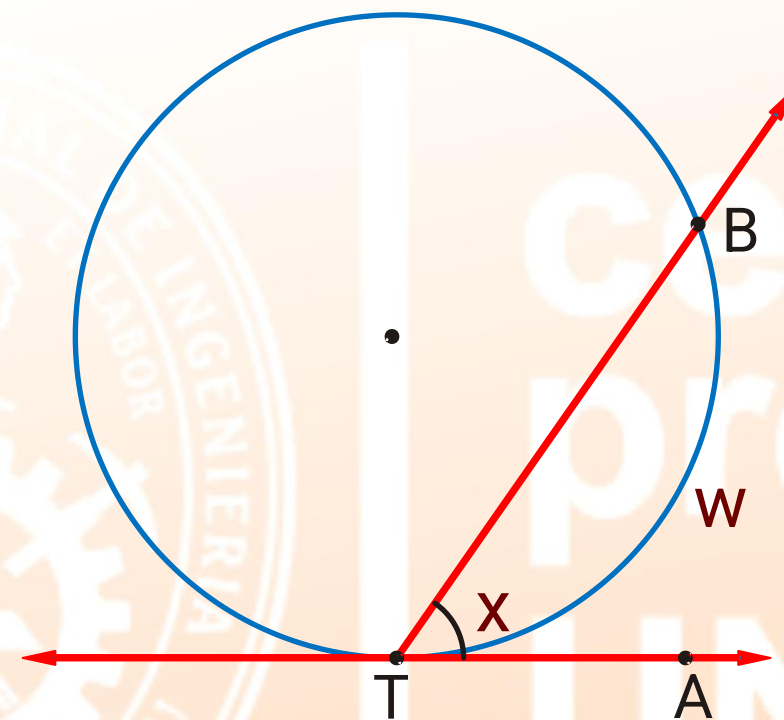
$$x = \frac{\theta}{2}$$

Definición.- Se denomina **ángulo semiinscrito** en una circunferencia, al ángulo que tiene el vértice en la circunferencia, un lado contenido en una recta tangente y el otro lado que contiene a una cuerda.



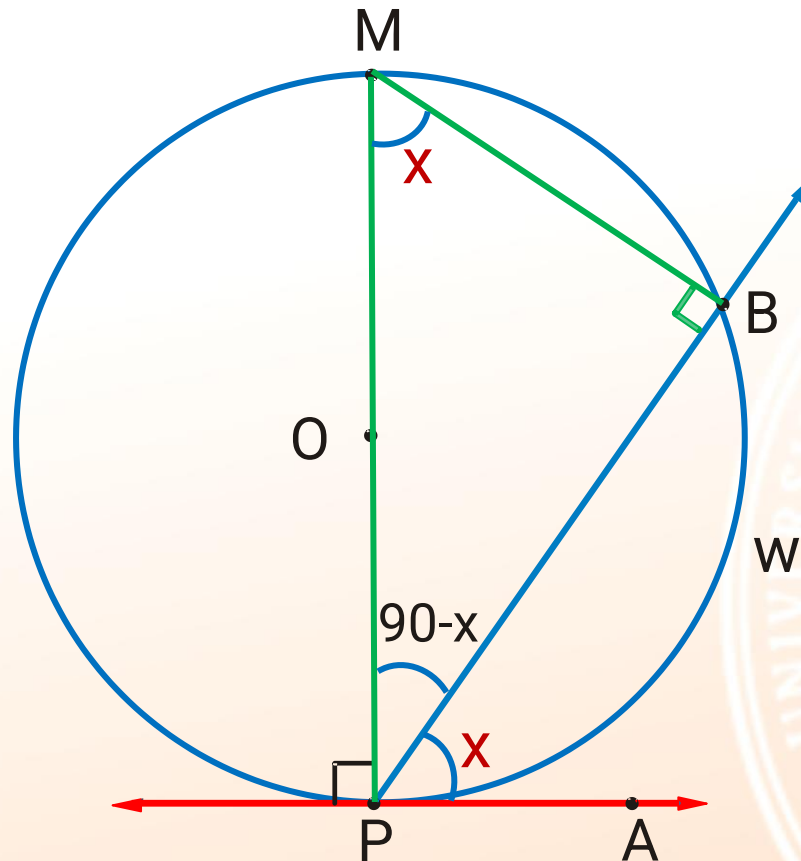
$\angle ATB$: Ángulo semiinscrito

Teorema. La medida de un **ángulo semiinscrito** es igual a la mitad de la medida del arco determinado por los lados del ángulo.



$$X = \frac{W}{2}$$

Demostración del teorema de la medida de un ángulo semiinscrito.



Trazar $\overline{MP}$ diámetro
Entonces, $\overline{OP} \perp \overline{AP}$
y $m \angle MBP = 90$

$m \angle MPB = 90 - x$

$m \angle BMP = x$

Por ángulo inscrito

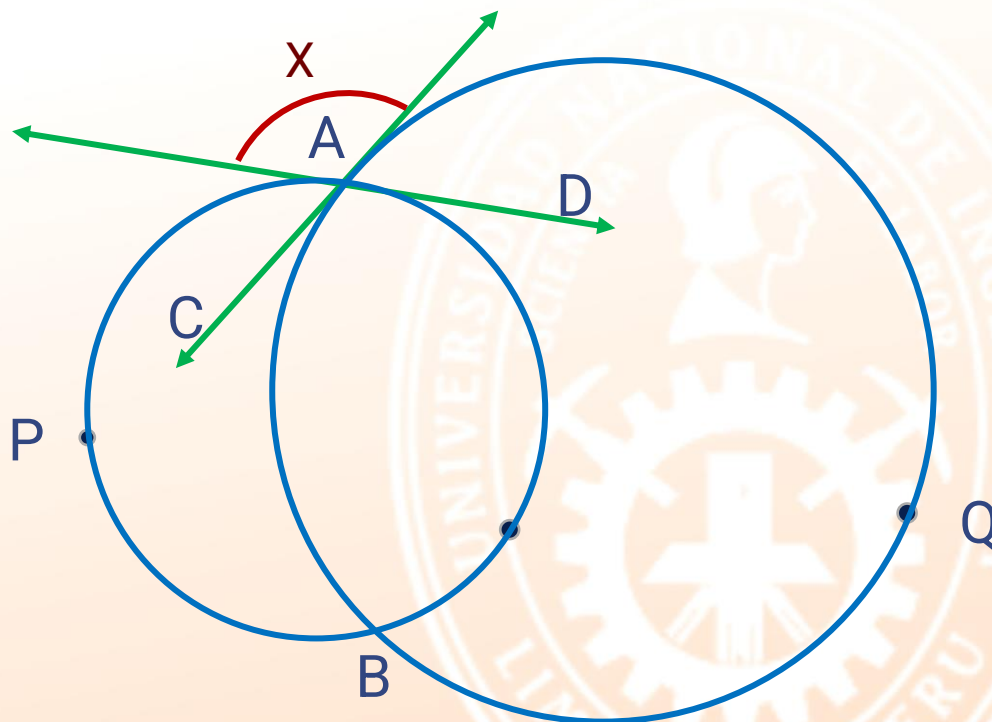
$$m \angle BMP = \frac{m \widehat{BP}}{2}$$

$$x = \frac{w}{2}$$

EJERCICIO 01

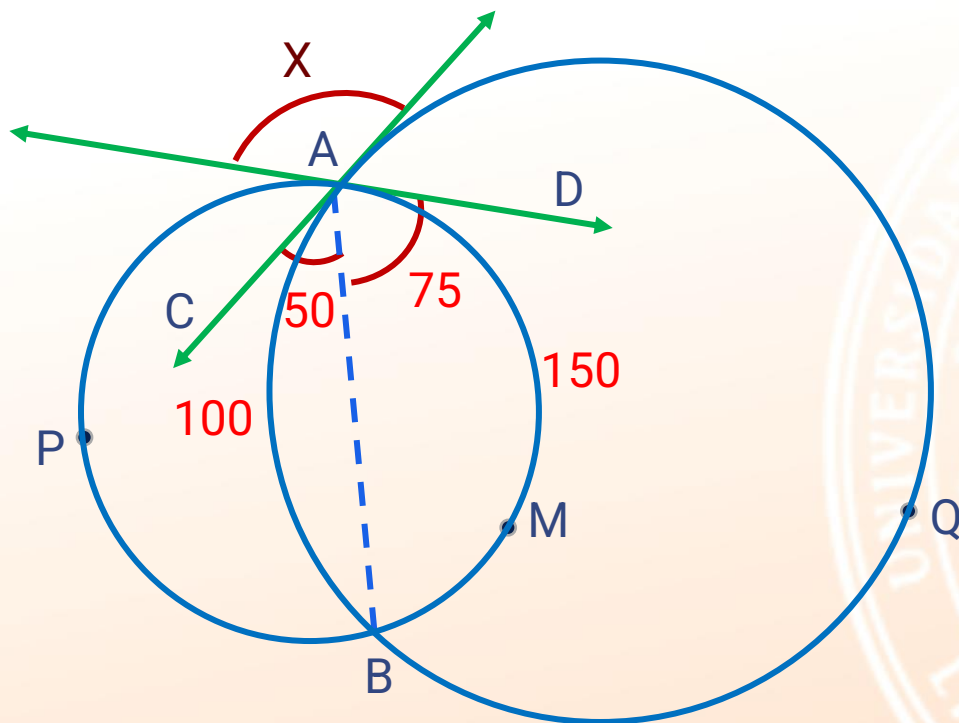
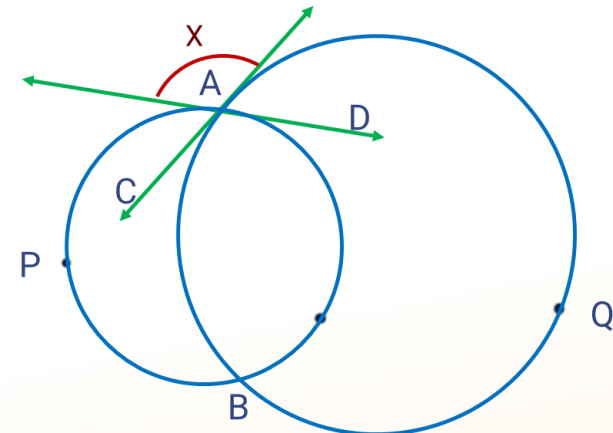
En la siguiente figura, L_1 es recta tangente a la circunferencia menor en A y L_2 es recta tangente a la circunferencia mayor en A. Si los arcos APB y AQB miden 210 y 260 respectivamente, calcule x .

- A) 90
- B) 135
- C) 180
- D) 120
- E) 125



RESOLUCIÓN 01

En la siguiente figura, L_1 es recta tangente a la circunferencia menor en A y L_2 es recta tangente a la circunferencia mayor en A. Si los arcos APB y AQB miden 210 y 260 respectivamente, calcule x .



De la figura:

$$m \widehat{AB} = 100 \quad \text{y} \quad m \widehat{AMB} = 150$$

Por ángulo semiinscrito

$$m \angle CAB = \frac{100}{2} = 50$$

$$m \angle DAB = \frac{150}{2} = 75$$

Luego:

$$x = 50 + 75 = 125$$

Clave: E

EJERCICIO 02

Se tienen dos circunferencias de diferentes radios tangentes exteriormente en T. La prolongación de la cuerda $\overline{AB}$ de la circunferencia mayor, es tangente a la menor en P y en la prolongación de $\overline{AT}$ se ubica un punto Q. Si la $m\angle BTP = 52$, calcule la $m\angle PTQ$.

A) 26

B) 52

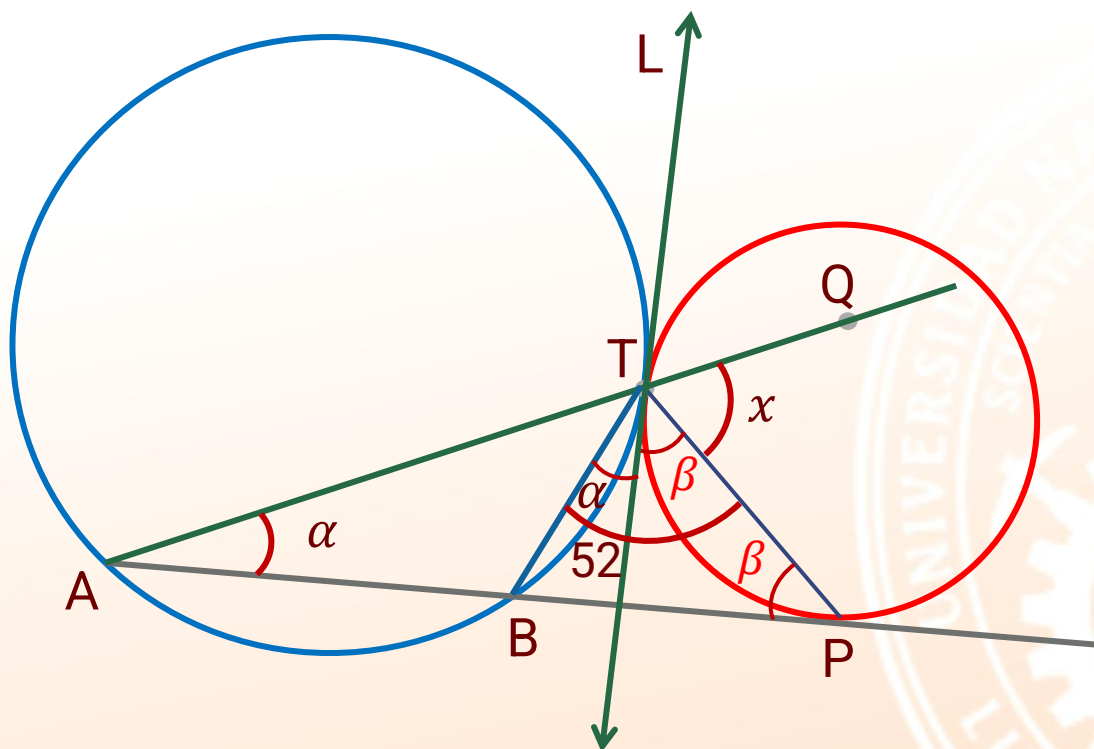
C) 69

D) 39

E) 78

RESOLUCIÓN 02

Se tienen dos circunferencias de diferentes radios tangentes exteriormente en T . La prolongación de la cuerda $\overline{AB}$ de la circunferencia mayor, es tangente a la menor en P y en la prolongación de $\overline{AT}$ se ubica un punto Q . Si la $m\angle BTP = 52$, calcule la $m\angle PTQ$.



Se traza la recta L , tangente común en el punto T .

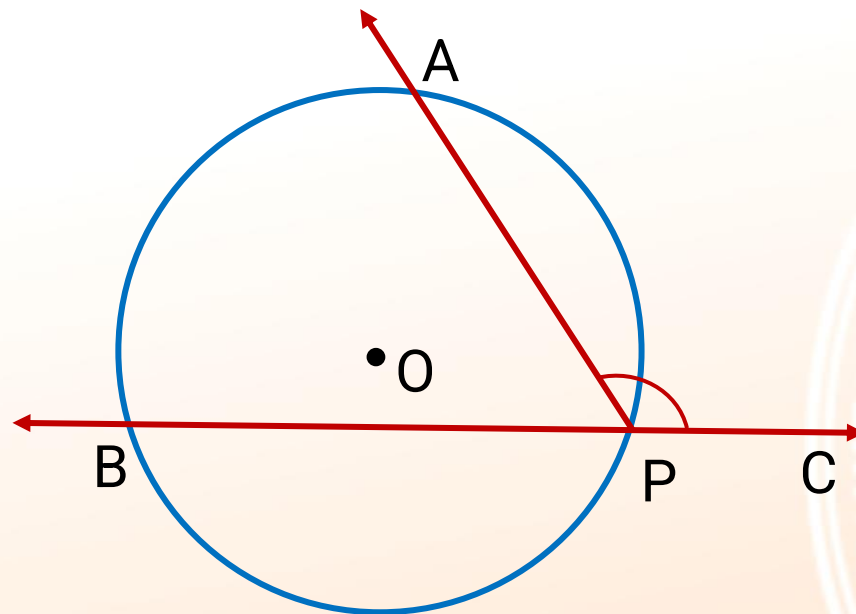
Ángulos inscritos y semiinscritos.

ΔATP : Por ángulo externo

$$x = \alpha + \beta = 52$$

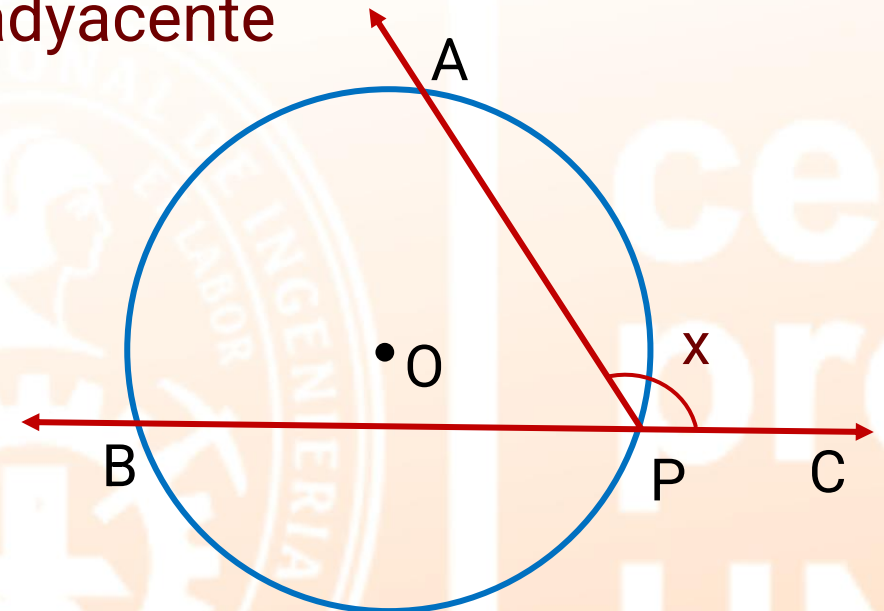
Clave: B

Definición.- Se denomina **ángulo exinscrito** en una circunferencia, al ángulo adyacente y suplementario a un ángulo inscrito de la circunferencia.



$\angle APC$: Ángulo exinscrito

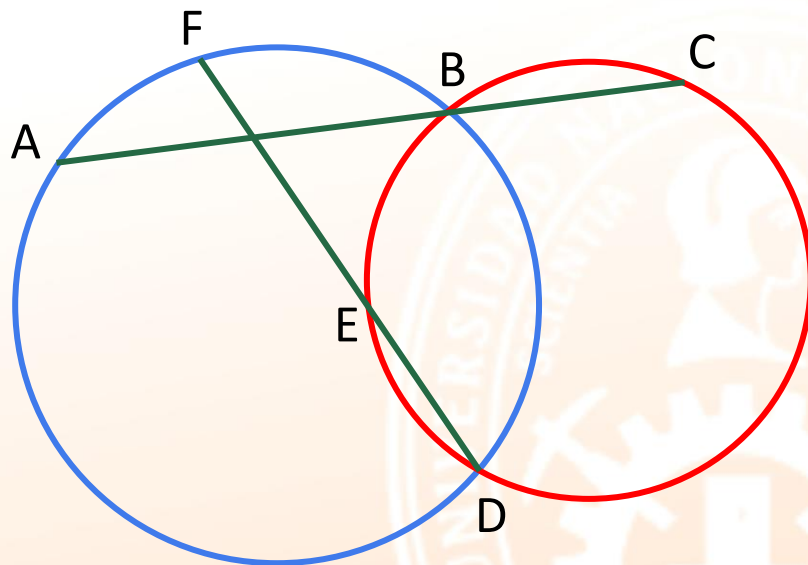
Teorema. La medida de un **ángulo exinscrito**, es igual a la mitad de la medida del arco mayor, determinado por los lados del ángulo inscrito, adyacente



$$X = \frac{m \widehat{APB}}{2}$$

EJERCICIO 03

En la figura, los arcos BF y BC miden 80 y 40 respectivamente. Si $B \in \overline{AC}$, $E \in \overline{DF}$ y la medida del arco DE es 30, calcule la medida del arco AD.



A) 90

B) 100

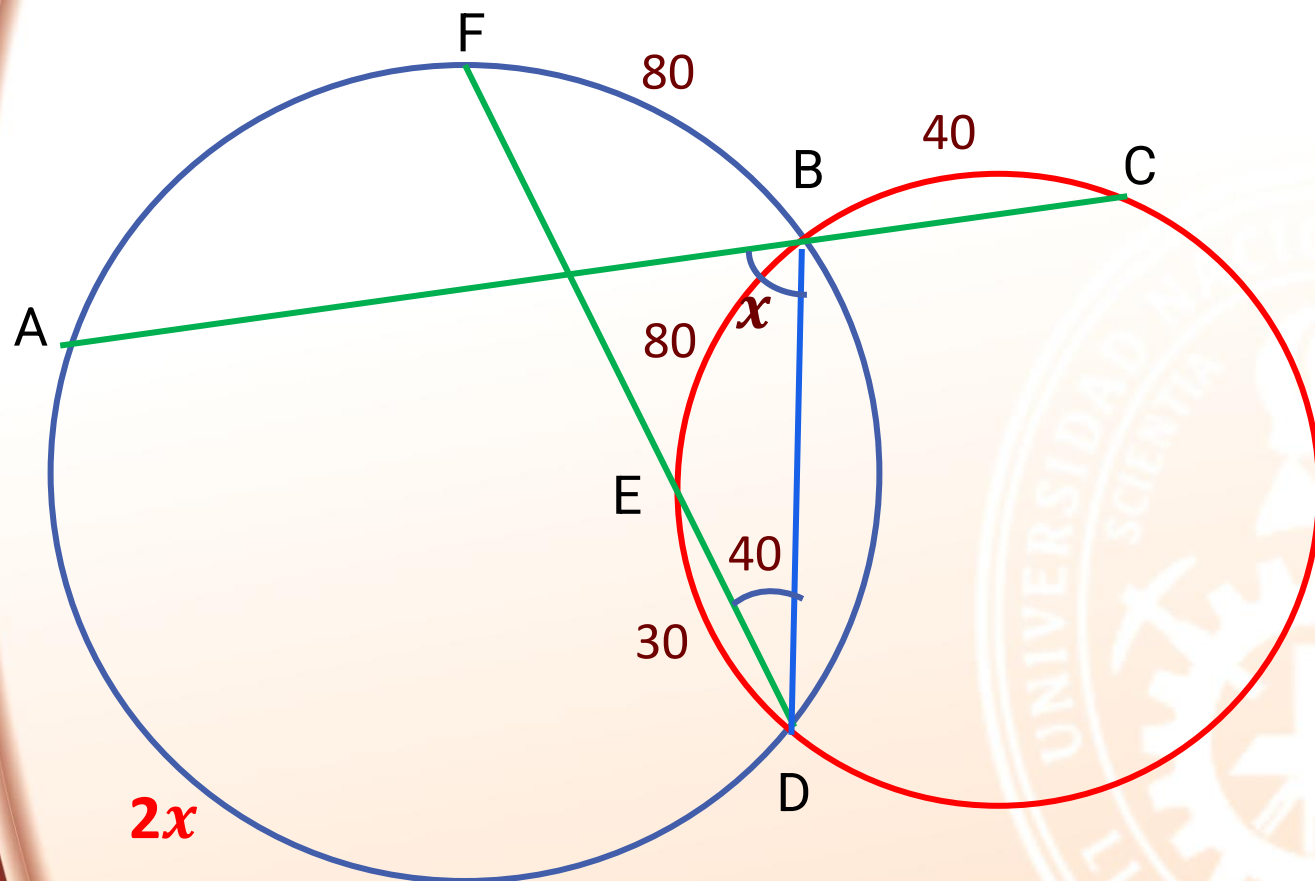
C) 120

D) 150

E) 180

RESOLUCIÓN 03

En la figura, los arcos BF y BC miden 80 y 40 respectivamente. Si $B \in \overline{AC}$, $E \in \overline{DF}$ y la medida del arco DE es 30, calcule la medida del arco AD.



Por ángulo inscrito: $m\angle EDB = 40$

$\Rightarrow$ la $m \widehat{EB} = 80$

También: $m \angle ABD = x$

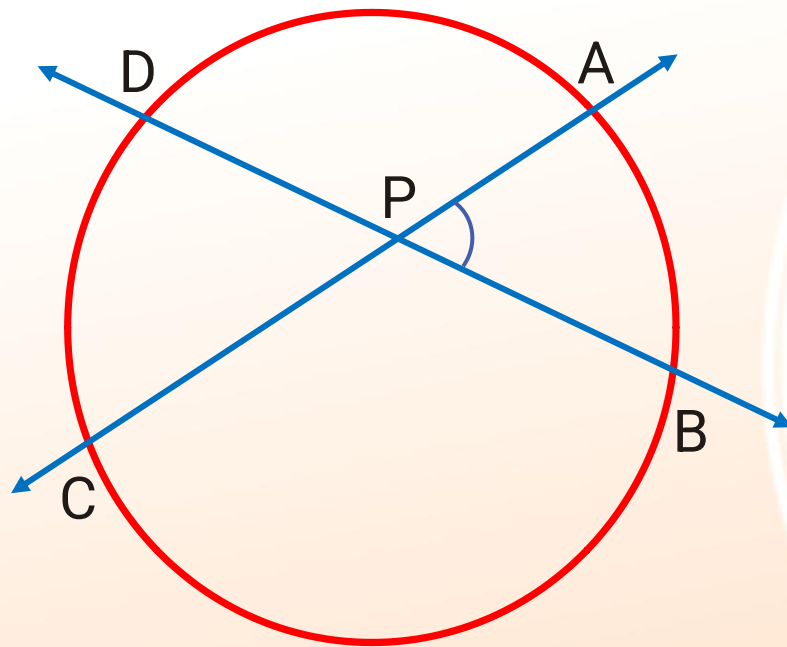
Por ángulo exinscrito:

$$x = \frac{30 + 80 + 40}{2}$$

$$2x = 150$$

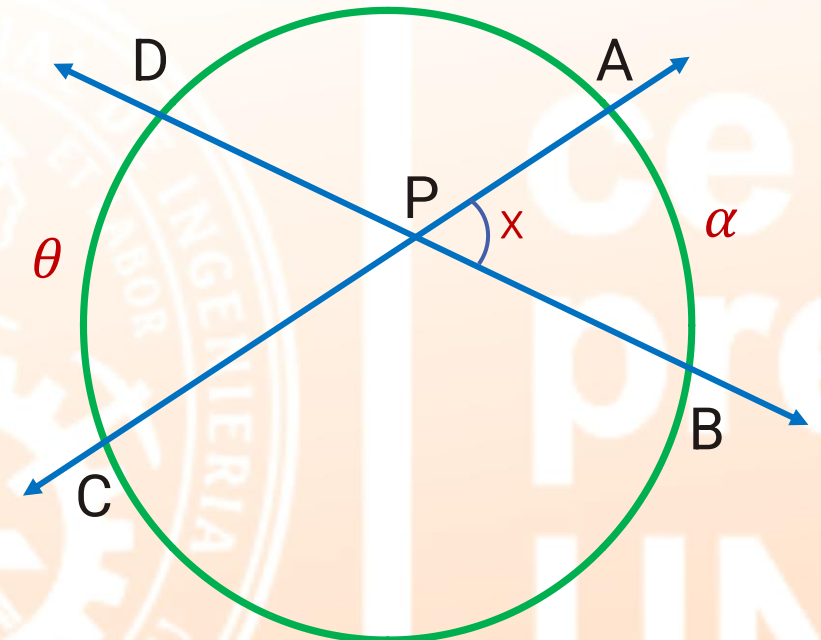
Clave: D

Definición.- Se denomina **ángulo interior** en una circunferencia, al ángulo que tiene el vértice en el interior de la circunferencia y sus lados, están determinados por dos cuerdas secantes.



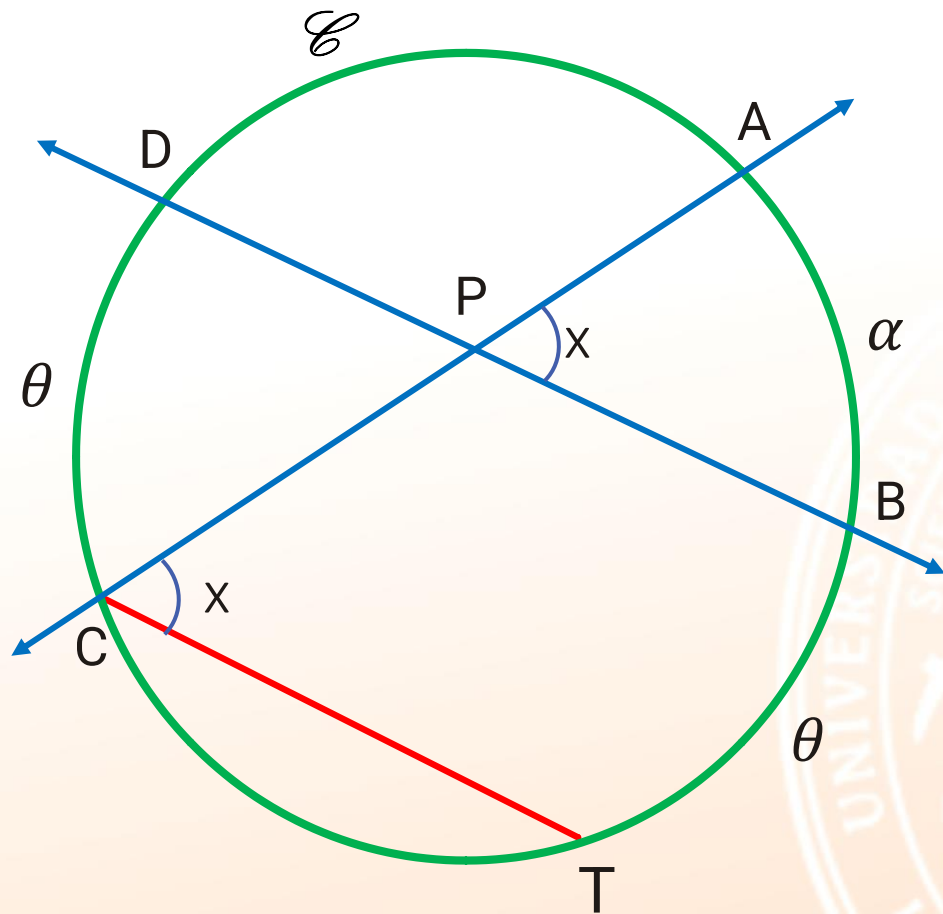
$\angle APB$: Ángulo interior

Teorema. La medida de un **ángulo interior** es igual a la semisuma de las medidas de los arcos determinados en los interiores de dicho ángulo y del opuesto por el vértice.



$$x = \frac{\alpha + \theta}{2}$$

Demostración del teorema de la medida de un ángulo interior .



Trazar $\overline{CT} \parallel \overline{BD}$

$$m \angle ACT = m \angle APB = x$$

Teorema:

$$m \widehat{TB} = m \widehat{CD} = \theta$$

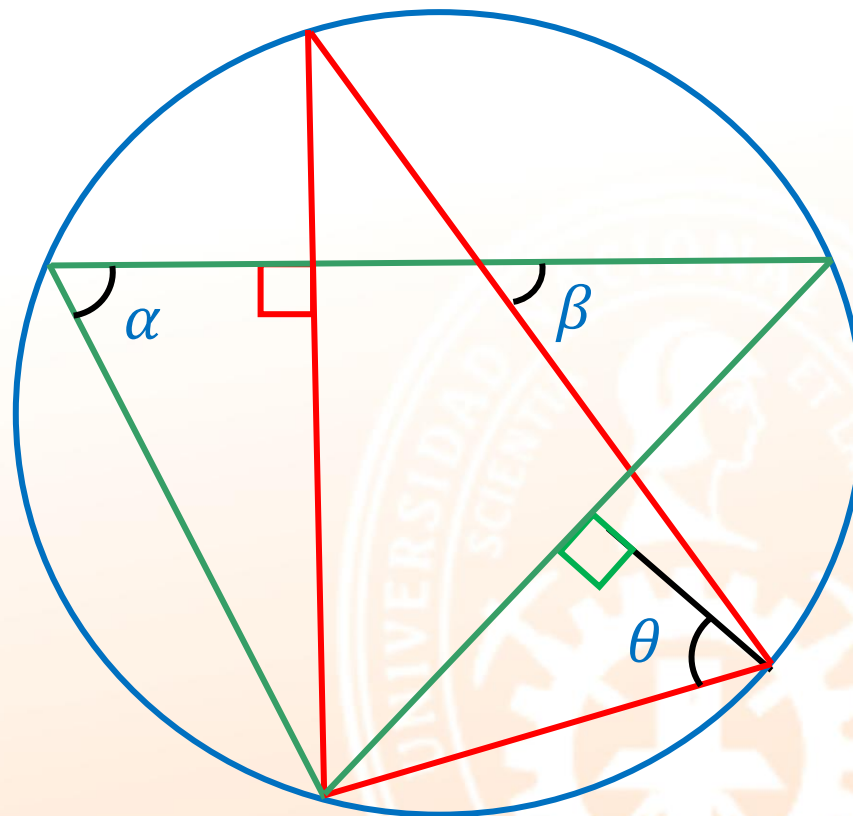
Por ángulo inscrito

$$m \angle ACT = \frac{m \widehat{ABT}}{2}$$

$$x = \frac{\alpha + \theta}{2}$$

EJERCICIO 04

En la figura, Calcule $\alpha + \beta + \theta$.



A) 90

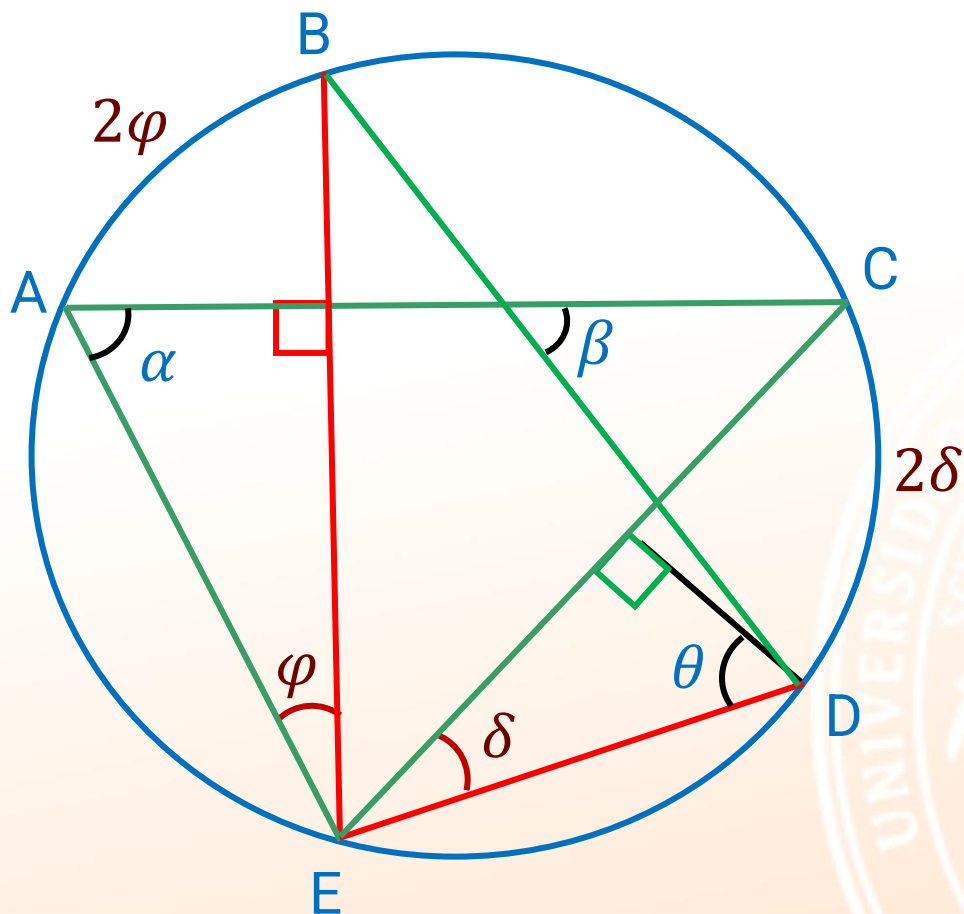
B) 135

C) 180

D) 120

E) 105

RESOLUCIÓN 04



De la figura:

$$\alpha + \varphi = 90 \dots\dots\dots(1)$$

$$\theta + \delta = 90 \dots\dots\dots(2)$$

Ángulo interior:

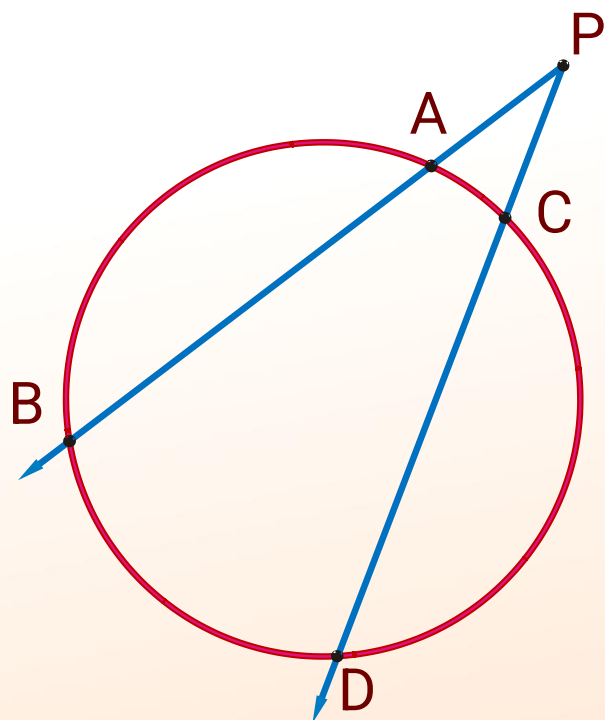
$$\beta = \frac{2\varphi + 2\delta}{2} \rightarrow \beta = \varphi + \delta \dots\dots(3)$$

Sumando (1), (2) y (3):

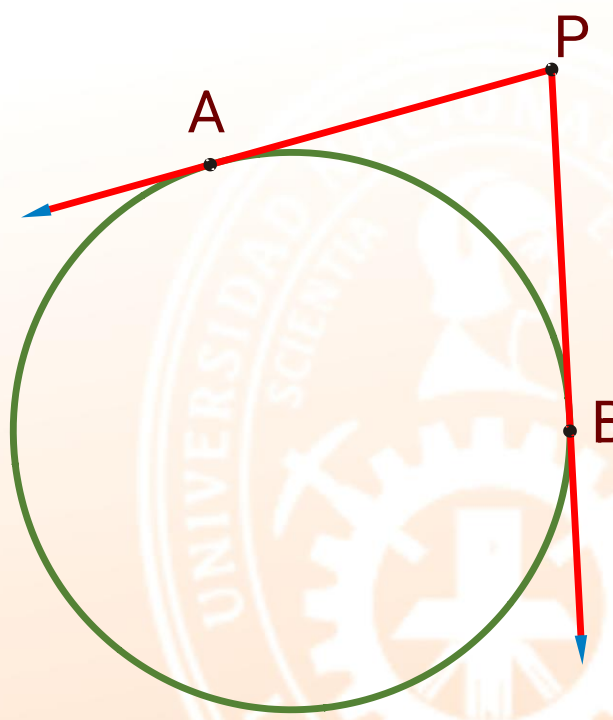
$$\alpha + \beta + \theta = 180$$

Clave: C

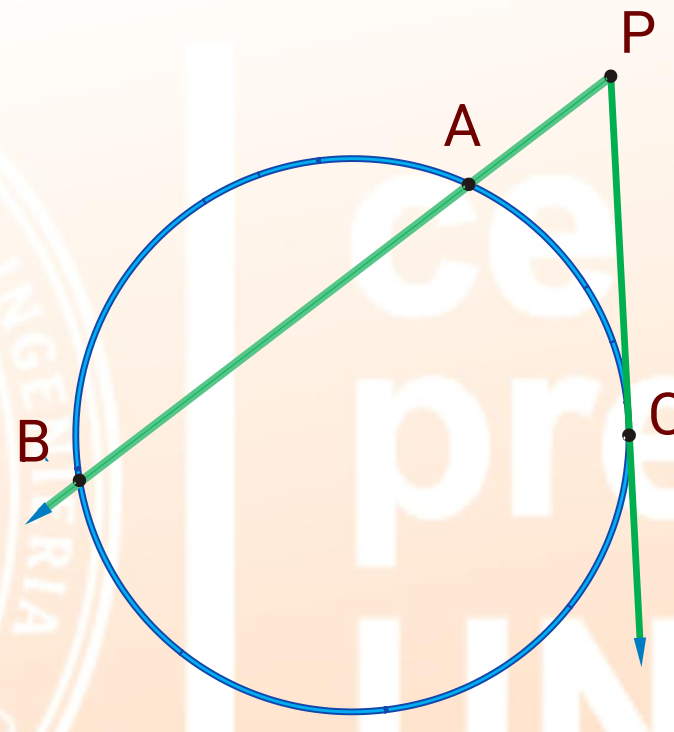
Definición.- Se denomina **ángulo exterior** de una circunferencia, al ángulo que tiene el vértice en el exterior de la circunferencia y los lados contenidos en dos rectas secantes, o dos rectas tangentes, o una recta secante y otra tangente.



$\angle BPD$: Ángulo exterior

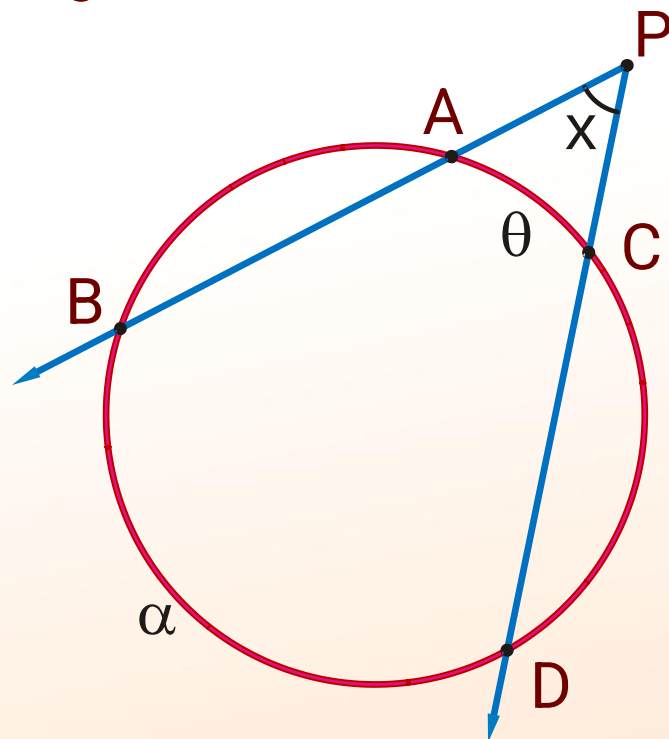


$\angle APB$: Ángulo exterior



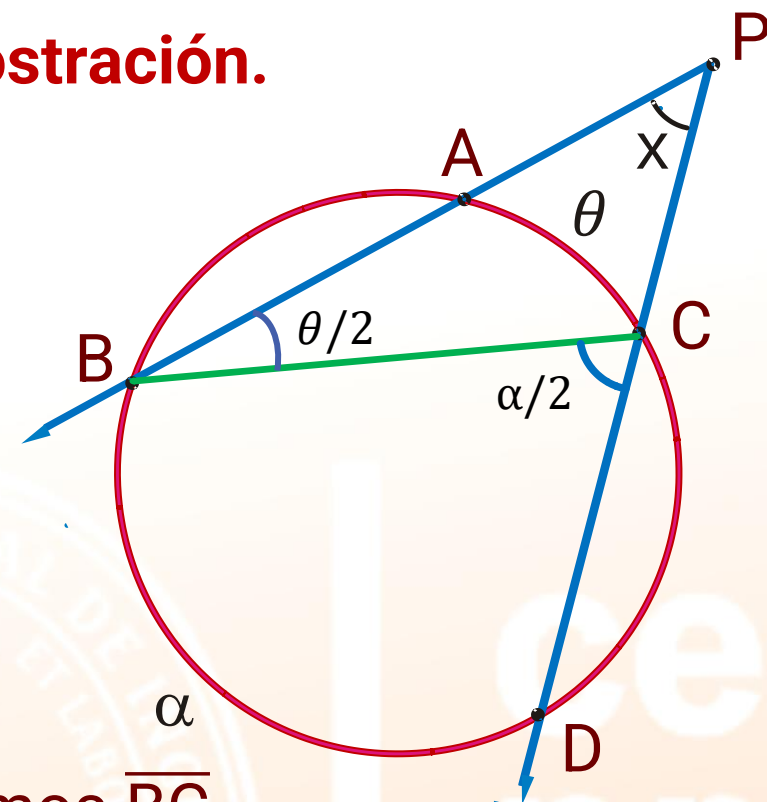
$\angle BPC$: Ángulo exterior

Teorema. La medida de un ángulo exterior es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos determinados en el interior de dicho ángulo.



$$x = \frac{\alpha - \theta}{2}$$

Demostración.



Trazamos $\overline{BC}$

Por ángulo inscrito

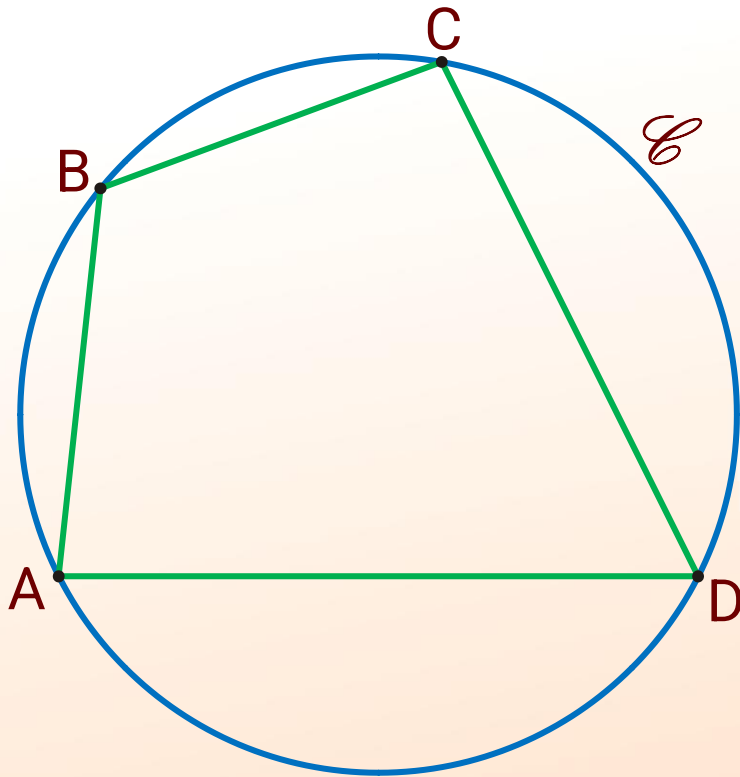
$m \angle ABC = \theta/2$ y $m \angle BCD = \alpha/2$

$\triangle BCP$, ángulo externo $x + \frac{\theta}{2} = \frac{\alpha}{2}$

$$\therefore x = \frac{\alpha - \theta}{2}$$

CUADRILÁTERO INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA

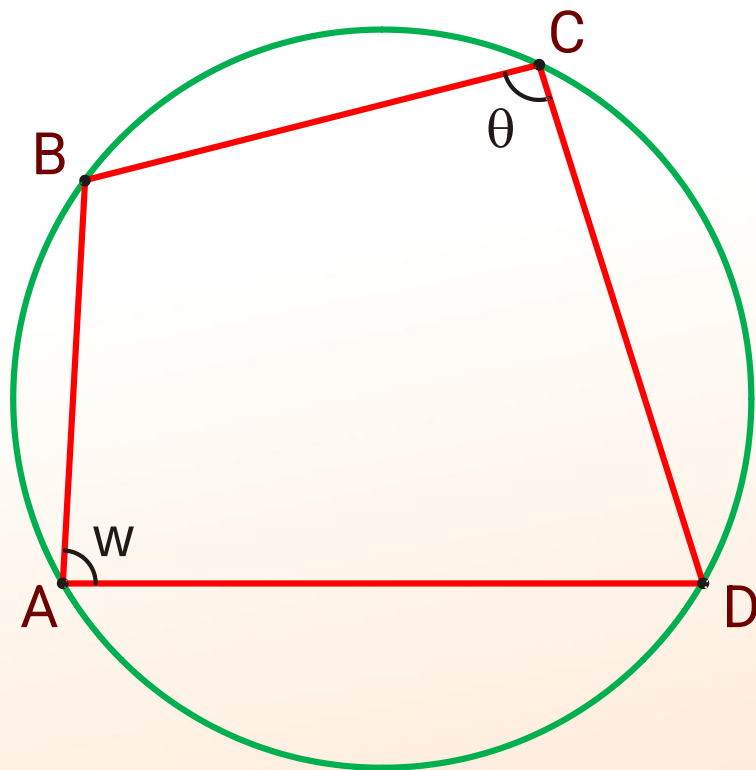
Definición. Un cuadrilátero está **inscrito** en una circunferencia, cuando sus cuatro vértices pertenecen a la circunferencia. En este caso, se dice que la circunferencia está circunscrita al cuadrilátero.



El cuadrilátero ABCD está inscrito en la circunferencia $\mathcal{C}$.

La circunferencia $\mathcal{C}$ está circunscrita al cuadrilátero ABCD

Teorema.- En un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, los ángulos opuestos son suplementarios.



$$w + \theta = 180$$

Demostración.

Por ángulo inscrito:

$$m \widehat{BAD} = 2\theta$$

$$m \widehat{BCD} = 2w$$

Luego:

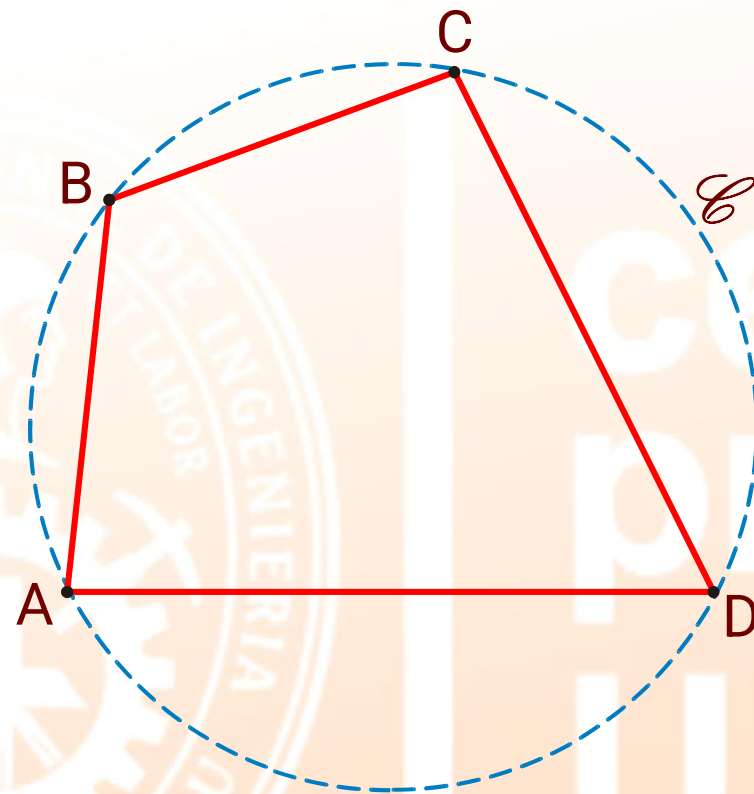
$$2\theta + 2w = 360$$

$$\therefore \theta + w = 180$$

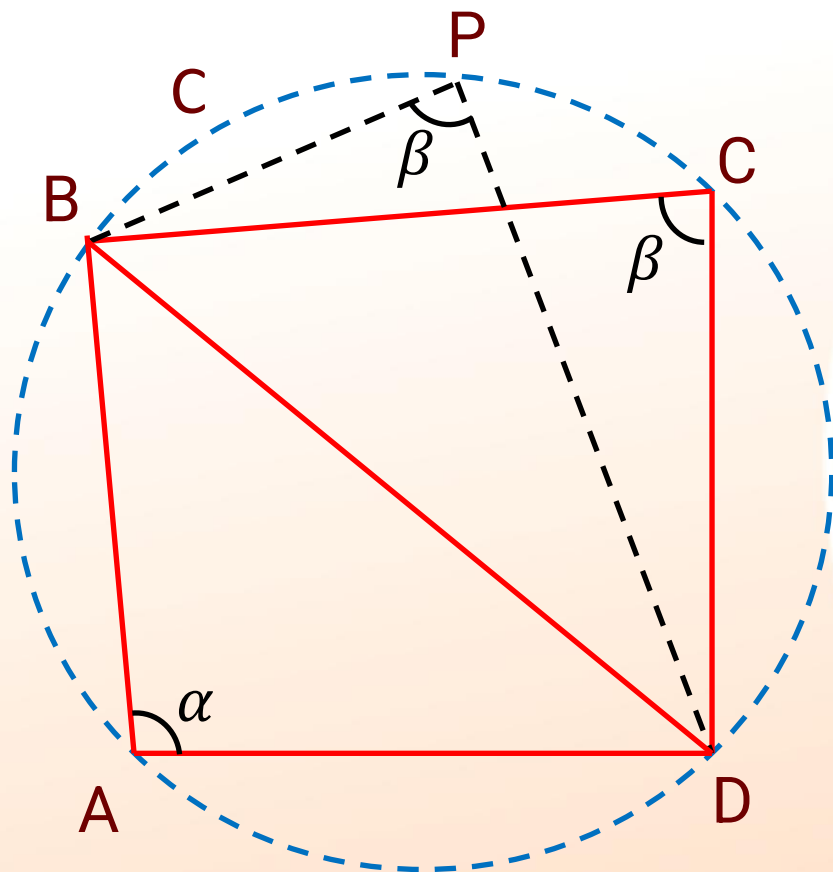
Definición. Un cuadrilátero es *inscriptible* en una circunferencia, si dicha circunferencia contiene a sus cuatro vértices.

Dado un cuadrilátero ABCD

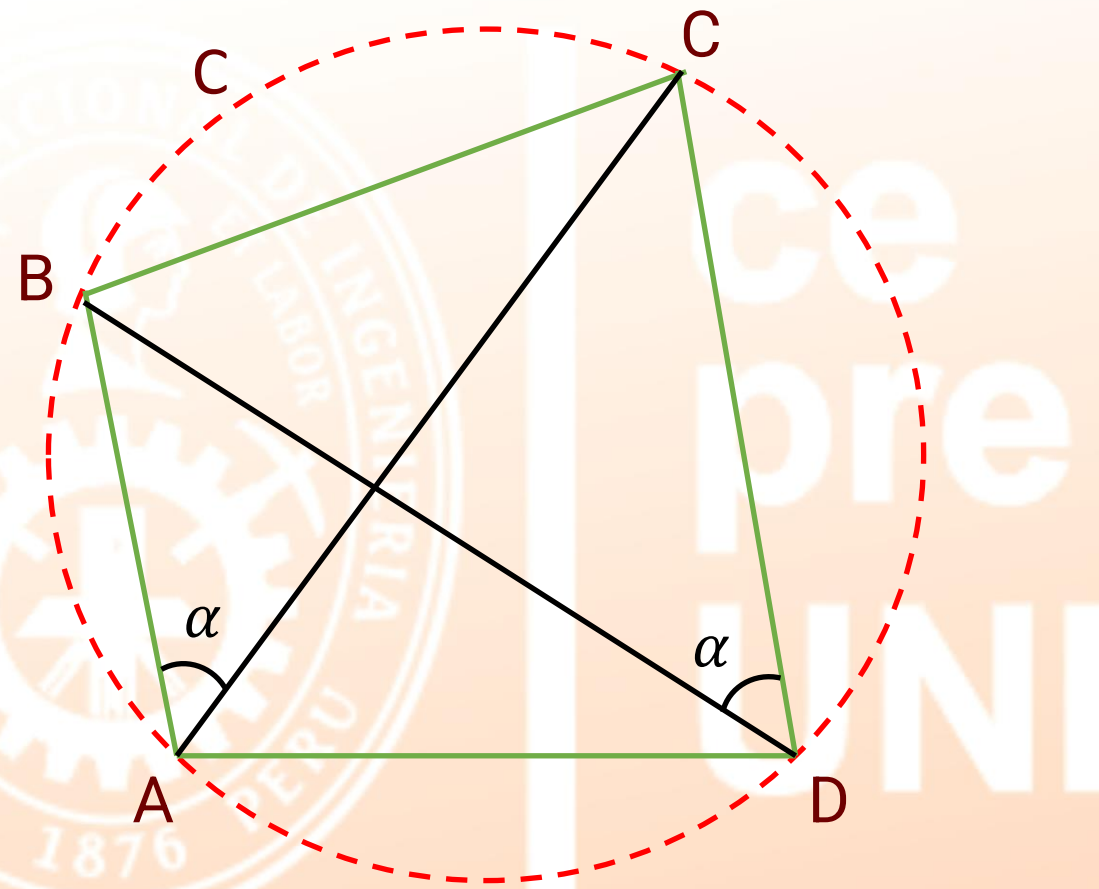
Si la circunferencia C contiene a los puntos A, B, C y D, entonces el cuadrilátero ABCD es inscriptible en C .



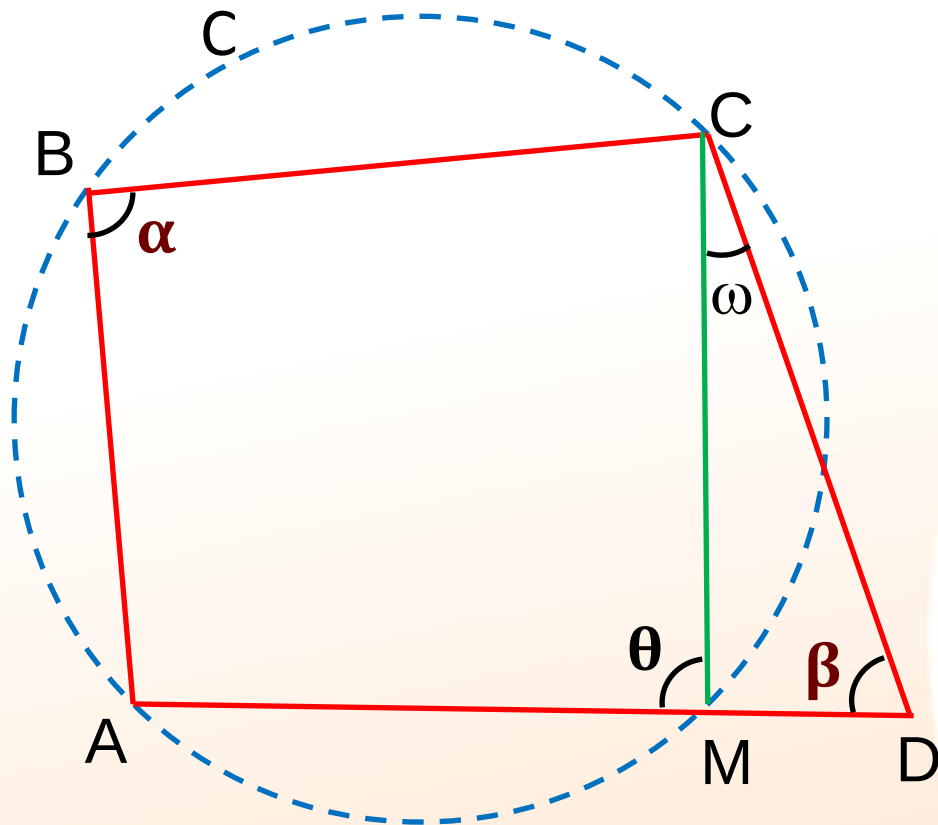
Teorema. Si en un cuadrilátero convexo, los ángulos opuestos son suplementarios; entonces el cuadrilátero es inscriptible en una circunferencia.



Corolario. Si en un cuadrilátero convexo, las diagonales determinan ángulos congruentes con los lados opuestos; entonces el cuadrilátero es inscriptible en una circunferencia.



Demostración:



En el cuadrilátero convexo ABCD:

$$\alpha + \beta = 180 \dots (1)$$

Tres puntos determinan una circunferencia.
Por A, B y C, trazamos la circunferencia $\mathcal{C}$

Supongamos que $\mathcal{C}$, interseca a $\overline{AD}$ en M.

Cuadrilátero ABCM inscrito en $\mathcal{C}$:

$$\alpha + \theta = 180 \dots (2)$$

De (1) y (2): $\beta = \theta$

ΔMCD : $\theta = \beta + \omega$

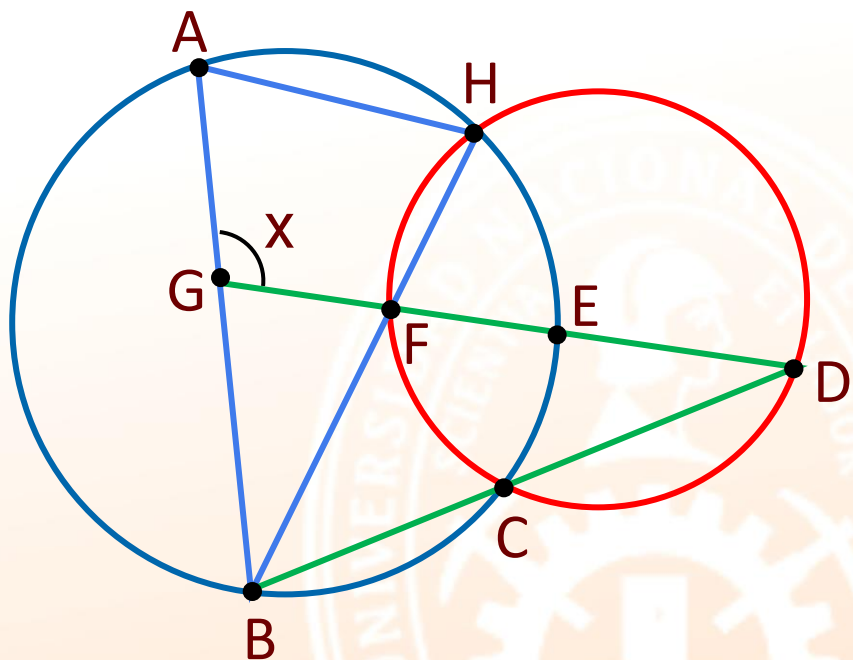
$$\omega = 0 \Rightarrow D \text{ es } M$$

$\therefore A, B, C \text{ y } D, \text{ pertenecen a } \mathcal{C}$

EJERCICIO 05

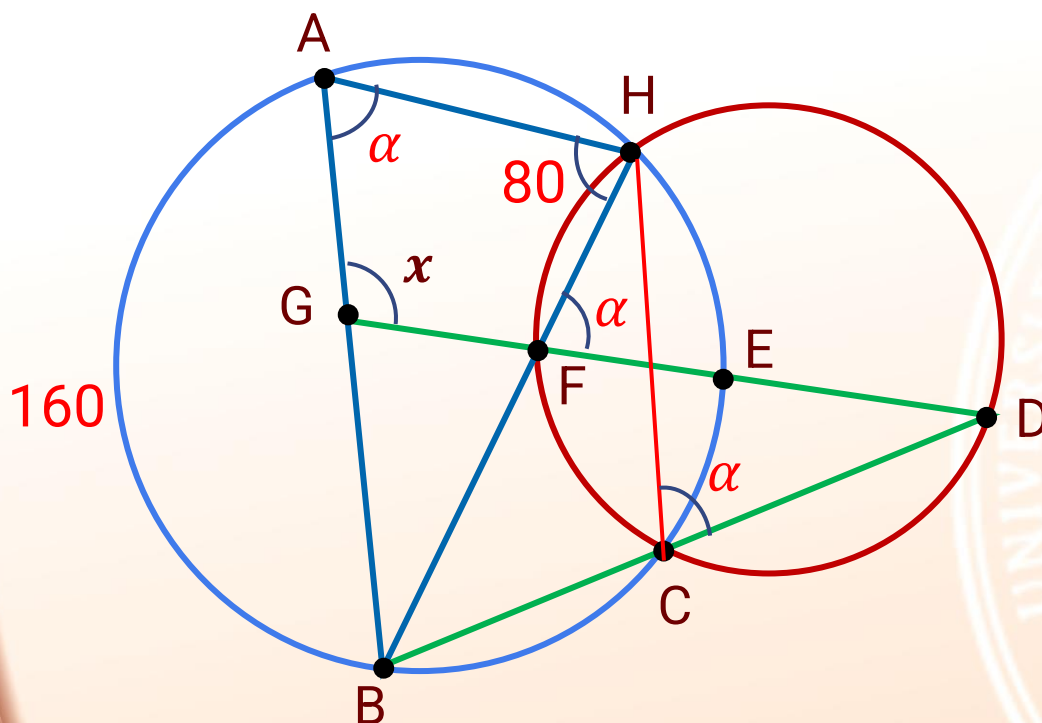
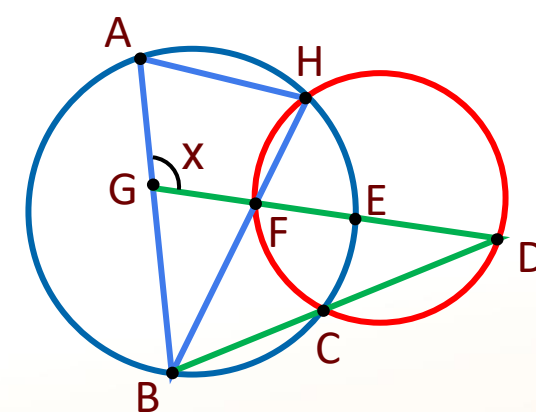
En la figura, la medida del arco AB es 160. Calcule x .

- A) 100
- B) 95
- C) 160
- D) 80
- E) 120


ce
pre
UNI

RESOLUCIÓN 05

En la figura, la medida del arco AB es 160.
Calcule x .



Àngulo inscrito:

$$m \angle HFD = m \angle HCD = \alpha$$

Àngulo exinscrito:

$$\alpha = \frac{m \widehat{BEH}}{2} \rightarrow m \widehat{BEH} = 2\alpha$$

Àngulo inscrito: $m \angle HAB = \alpha$

Cuadrilátero AHFG es inscriptible:

$$x + \alpha + 80 + 180 - \alpha = 360$$

$$x = 100$$

Clave: A

EJERCICIO 06

En una circunferencia , se inscribe el triángulo equilátero ABC. En los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ ubican los puntos M y L , y en el arco BC se ubica el punto N, respectivamente, tal que $AM = MB$. Si $m \angle LMN = 90$ y los arcos BN y NC son congruentes, entonces la medida del ángulo MLN es

A) 30

B) 40

C) 45

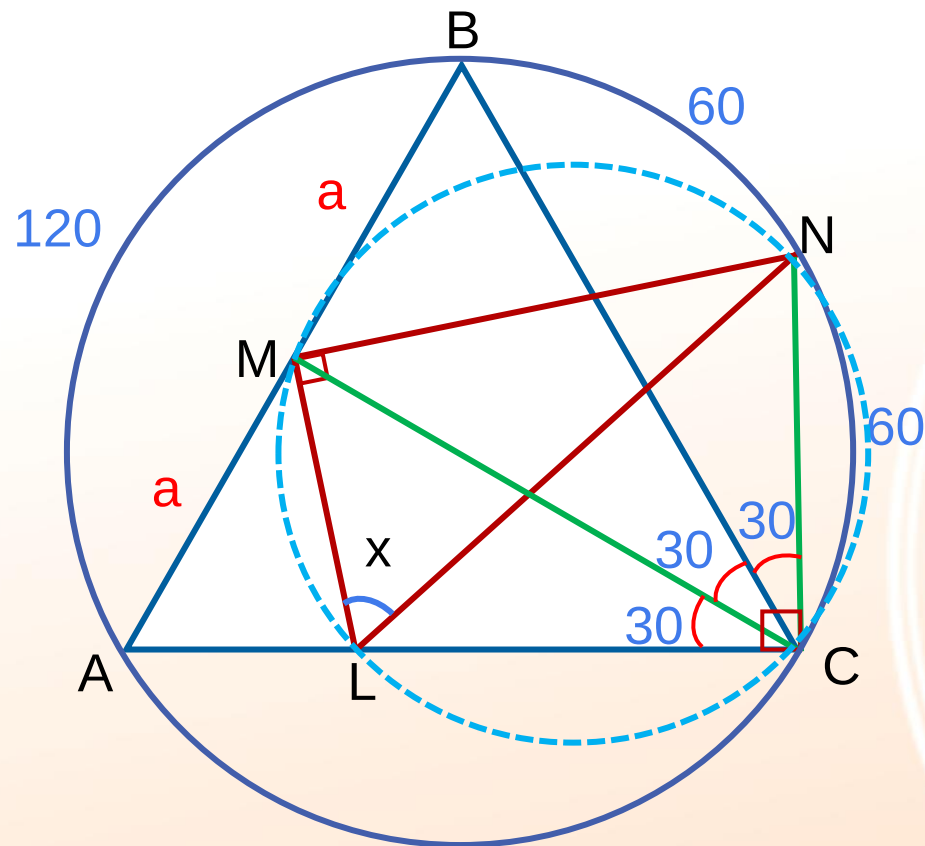
D) 50

E) 60

RESOLUCIÓN 06

En una circunferencia, se inscribe el triángulo equilátero ABC . En los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ ubican los puntos M y L , y en el arco BC se ubica el punto N , respectivamente, tal que $AM = MB$. Si $m\angle LMN = 90^\circ$ y los arcos BN y NC son congruentes, entonces la medida del ángulo MLN es

$$m\angle MLN = x$$



Se deduce que $m\widehat{AB} = m\widehat{BC} = 120$

$\triangle ABC$ es equilátero
entonces $\overline{CM}$: mediana y bisectriz interior.

$\angle$ inscrito: $m\angle BCN = 30$

$LMNC$, cuadrilátero inscriptible:

$$x = m\angle MCN$$

$$\therefore x = 60$$

Clave: E

EJERCICIO 07

Sean C_1 y C_2 dos circunferencias secantes en los puntos A y B. La recta L_1 interseca a la circunferencia C_1 en los puntos C y E, y la recta L_2 interseca a la circunferencia C_2 en los puntos F y D tal que $C - A - F$ y $E - A - D$. Si las medidas de los ángulos AEB y AFB son 30 y 45, respectivamente, entonces la medida del ángulo agudo que determinan las rectas L_1 y L_2 al intersecarse es

A) 60
D) 75

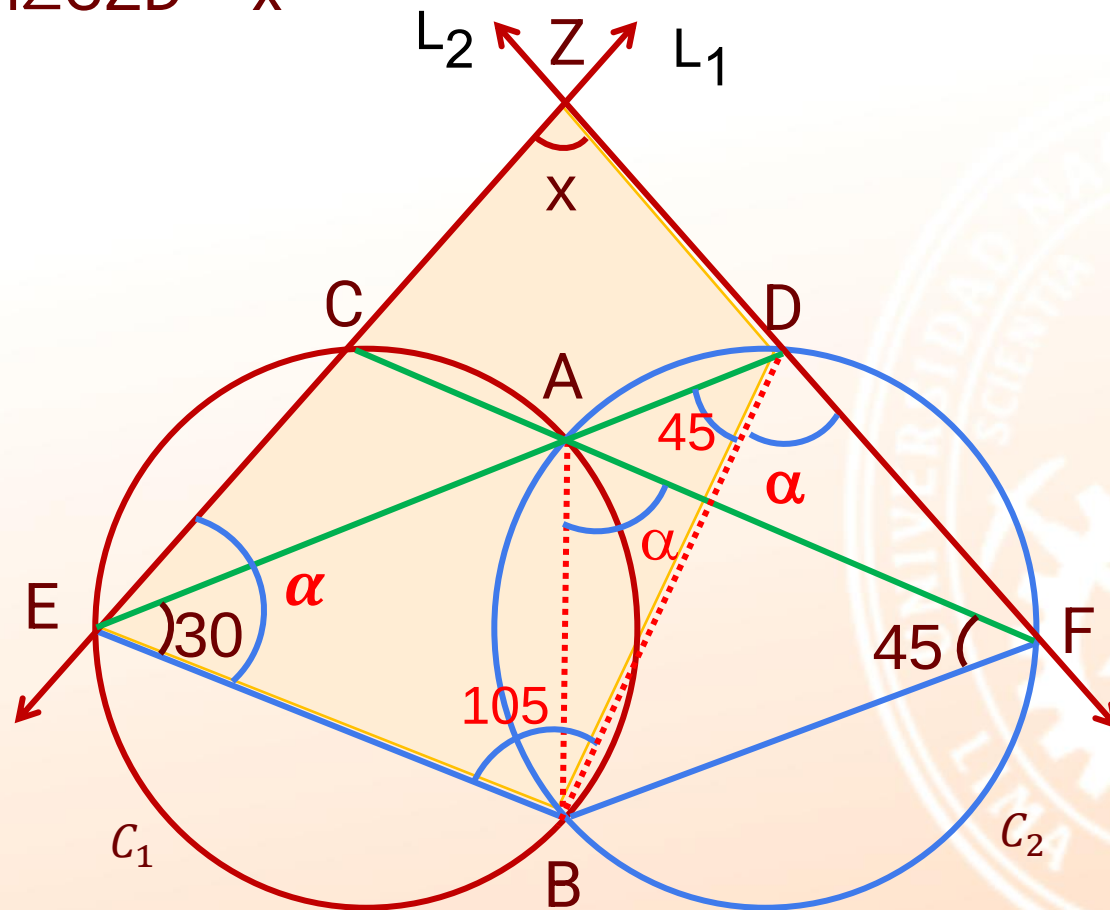
B) 65
E) 80

C) 70

RESOLUCIÓN 07

Sean C_1 y C_2 dos circunferencias secantes en los puntos A y B. La recta L_1 interseca a la circunferencia C_1 en los puntos C y E, y la recta L_2 interseca a la circunferencia C_2 en los puntos F y D tal que $C - A - F$ y $E - A - D$. Si las medidas de los ángulos AEB y AFB son 30 y 45, respectivamente, entonces la medida del ángulo agudo que determinan las rectas L_1 y L_2 al intersecarse es

$$m\angle CZD = x$$



Se traza $\overline{AB}$.

Entonces:

- ☐ ECAB: inscrito
- ☐ BADF: inscrito
- ☐ EZDB: inscriptible

$$\text{Luego: } x + 105 = 180$$

$$x = 75$$

Clave: D



ce
pre
UNI

Geometría

GRACIAS

ce
pre
UNI